

Comparaison des suites en l'infini

Plan du chapitre

1 Les différentes relations de comparaison	page 2
1.1 Définition des relations de comparaison	page 2
1.1.1 Relation de domination	page 2
1.1.2 Relation de prépondérance	page 3
1.1.3 Relation d'équivalence des suites	page 4
1.2 Propriétés des relations de comparaison	page 6
1.2.1 Propriétés de o et O	page 6
1.2.2 Propriétés de \sim	page 8
2 Les théorèmes de croissances comparées	page 12
3 Quelques applications des relations de comparaison	page 14
3.1 Calculs de limites	page 14
3.2 Etudes de signes au voisinage de $+\infty$	page 14

1 Les différentes relations de comparaison

1.1 Définition des relations de comparaison

1.1.1 Relation de domination

DÉFINITION 1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est quelconque, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **dominée** par la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M |v_n|.$$

Si la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0 , dire que la suite u est dominée par la suite v équivaut à dire que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est bornée.

Notations. Quand la suite u est dominée par la suite v , on écrit

$$u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n) \text{ (notation de LANDAU)}$$

ou

$$u_n \underset{+\infty}{\lesssim} v_n \text{ (notation de HARDY).}$$

La notation la plus fréquemment utilisée est la notation de LANDAU $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ mais la notation de HARDY $u_n \underset{+\infty}{\lesssim} v_n$ est parfois utilisée, cette notation ayant entre autre le mérite de pouvoir être renversée : si la suite v **domine** la suite u , on écrit $v_n \underset{+\infty}{\gtrsim} u_n$.

⇒ **Commentaire.** Il faut expliquer chacune des deux notations. La lettre O est l'initiale de l'expression « ordre de grandeur ». Dire que $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ signifie que l'ordre de grandeur en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est inférieur ou égal à l'ordre de grandeur de la

suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$. Par exemple, $n \underset{+\infty}{=} O(n^2)$ ou $\frac{1}{n^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou aussi $n \underset{+\infty}{=} O(n)$ ou $2n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{n}{2}\right)$ car chacune des deux suites $(2n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{n}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ a le même ordre de grandeur à savoir l'ordre de grandeur de la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ensuite, il ne faut pas confondre $\underset{+\infty}{\lesssim}$ avec \leq . \leq est la relation d'ordre usuelle permettant de comparer à n fixé les nombres u_n et v_n . Par exemple, $\exists n \in \mathbb{N}, 2n - 3 \not\leq n$ et même $\forall n \geq 4, 2n - 3 > n$ mais par contre, on a $2n - 3 \underset{+\infty}{\lesssim} n$ car l'ordre de grandeur de $2n - 3 = 2n^1 - 3$, à savoir l'exposant 1 est le même que l'ordre de grandeur de $n = n^1$. On peut démontrer directement le fait que $2n - 3 \underset{+\infty}{\lesssim} n$: pour $n \geq 2, 0 \leq \frac{2n-3}{n} = 2 - \frac{3}{n} \leq 2$ et donc la suite $\left(\frac{2n-3}{n}\right)_{n \geq 2}$ est bornée.

Théorème 1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Si la suite v ne s'annule pas, $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ si et seulement si il existe une suite bornée $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n w_n$.

DÉMONSTRATION. Soit $w = \frac{u}{v}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = v_n w_n$. De plus, $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ si et seulement si la suite w est bornée. □

En particulier, on a immédiatement

Théorème 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $u_n \underset{+\infty}{=} O(1)$.

Exemples.

- $\frac{1}{n} \underset{+\infty}{=} O(1)$.
- $\frac{2n+3}{n-5} \underset{+\infty}{=} O(1)$ car la suite $\left(\frac{2n+3}{n-5}\right)$ est convergente et en particulier bornée.

- $\frac{2n+3}{n^2-5} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$ car pour $n \geq 3$,

$$\left| \frac{(2n+3)/(n^2-5)}{1/n} \right| = \frac{2n^2+3n}{n^2-5} \leq \frac{2n^2+3n^2}{n^2-5} = \frac{1}{\frac{1}{5}-\frac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{\frac{1}{5}-\frac{1}{9}} = \frac{45}{4}$$

et donc la suite $\left(\frac{(2n+3)/(n^2-5)}{1/n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

- $\frac{3}{n} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$.
- $\frac{e^{in\pi/3}}{n} \underset{+\infty}{=} O(1)$.

□

1.1.2 Relation de prépondérance

DÉFINITION 2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes.

On suppose que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0 . On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **négligeable devant** la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge et a pour limite 0.

Dit autrement, si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **négligeable** par la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon |v_n|).$$

Notations. Quand la suite u est négligeable par la suite v , on écrit

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \text{ (notation de LANDAU)}$$

ou

$$u_n \underset{+\infty}{\ll} v_n \text{ (notation de HARDY)}.$$

La notation la plus fréquemment utilisée est la notation de LANDAU $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ mais la notation de HARDY $u_n \underset{+\infty}{\ll} v_n$ est parfois utilisée, cette notation ayant entre autre le mérite de pouvoir être renversée : si la suite v est **prépondérante devant** la suite u , on écrit $v_n \underset{+\infty}{\gg} u_n$. □

⇒ **Commentaire.** Dire que $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ signifie que l'ordre de grandeur en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement inférieur à l'ordre de grandeur de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$. Par exemple, $n \underset{+\infty}{=} o(n^2)$ ou $\frac{1}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. En effet

$$\frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Théorème 3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Si la suite v ne s'annule pas, $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ si et seulement si il existe une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, de limite nulle, telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n w_n$.

DÉMONSTRATION. Soit $w = \frac{u}{v}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = v_n w_n$. De plus, $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ si et seulement si la suite w converge vers 0. □

Les deux théorèmes suivants sont immédiats.

Théorème 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si $u_n \underset{+\infty}{=} o(1)$.

Plus généralement, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $u_n \underset{+\infty}{=} \ell + o(1)$.

⇒ **Commentaire**. Le théorème 4 énonce explicitement des résultats immédiats. Le but est de s'appropriier des notations. Par exemple, un exercice classique de classes préparatoires consiste à montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, converge vers γ la constante d'Euler. Ceci s'écrivait jusque là $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ln n) = \gamma$ et pourra dorénavant s'écrire $H_n - \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \gamma + o(1)$ ce qui se lit $H_n - \ln n$ est égal à γ plus une suite tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On peut donc aussi écrire

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

Théorème 5. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes.

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \Rightarrow u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n).$$

1.1.3 Relation d'équivalence des suites

DÉFINITION 3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

On dit que la suite u est **équivalente** à la suite v en $+\infty$ si et seulement si $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Notation. Quand la suite u est équivalente à la suite v en $+\infty$, on écrit $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. □

Exemple. $2n^2 - 3n + 5 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n^2$ car $\frac{2n^2 - 3n + 5}{2n^2} = 1 - \frac{3}{2n} + \frac{5}{2n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$.

Théorème 6. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n).$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n &\Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1) \Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} v_n + v_n o(1) \\ &\Leftrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n) \quad (\text{car } \frac{v_n o(1)}{v_n} = o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0). \end{aligned}$$

□

Par exemple, dire que $n^2 - 3n + 5 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$ équivaut à dire que $-3n + 5$ est négligeable devant n^2 et donc que $n^2 - 3n + 5 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^2 + o(n^2)$.



On met tout de suite en garde contre une erreur classique.

Les phrases « $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ » et « $u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ » n'ont aucun rapport.

En effet, les suites $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ vérifient $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ mais $\frac{1/n}{1/n^2} = n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ et donc $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ne sont pas des suites équivalentes. Donc,

$$u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \not\Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n.$$

De même, les suites $(n^2 + n)$ et (n^2) sont équivalentes car $\frac{n^2 + n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$.

Mais $(n^2 + n) - n^2 = n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$. Donc,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \not\Rightarrow u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

On donne maintenant un formulaire d'équivalents usuels. Ce formulaire est un démarrage et sera largement complété dans le chapitre « Comparaison des fonctions en un point ».

Théorème 7. Formulaire d'équivalents usuels.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **ne s'annulant pas à partir d'un certain rang** telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, (1 + u_n)^\alpha - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha u_n$ ou encore $(1 + u_n)^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \alpha u_n + o(u_n)$.
- $\frac{1}{1 - u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\frac{1}{1 - u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + u_n + o(u_n)$.
- $\frac{1}{1 + u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -u_n$ ou encore $\frac{1}{1 + u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - u_n + o(u_n)$.
- $\sqrt{1 + u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} u_n$ ou encore $\sqrt{1 + u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{2} u_n + o(u_n)$.

- $e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ ou encore $e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + u_n + o(u_n)$.
- $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n + o(u_n)$ (ou aussi si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n - 1$).
- $\sin(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\sin(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n + o(u_n)$.
- $\tan(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\tan(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n + o(u_n)$.
- $\text{Arcsin}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\text{Arcsin}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n + o(u_n)$.
- $\text{Arctan}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\text{Arctan}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n + o(u_n)$.
- $\text{sh}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ ou encore $\text{sh}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n + o(u_n)$.
- $1 - \cos(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$ ou encore $\cos(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$.
- $\text{ch}(u_n) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$ ou encore $\text{ch}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$.

DÉMONSTRATION .

- Si f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $] -a, a[$ ($a > 0$) vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, alors

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u) - f(0)}{u - 0} = f'(0) = 1.$$

Puisque (u_n) est une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang de limite nulle, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(u_n)}{u_n} = 1$ ou encore $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. Ceci montre que

$$\begin{aligned} e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n, \quad \ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n, \quad \sin(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n, \quad \tan(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n, \\ \text{Arcsin}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n, \quad \text{Arctan}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n, \quad \text{sh}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n. \end{aligned}$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour $u > -1$, posons $f(u) = (1 + u)^\alpha$.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1 + u)^\alpha - 1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u) - f(0)}{u - 0} = f'(0) = \alpha(1 + 0)^{\alpha-1} = \alpha.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + u_n)^\alpha - 1}{\alpha u_n} = 1$ ou encore que $(1 + u_n)^\alpha - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha u_n$.

En particulier, $\sqrt{1 + u_n} - 1 = (1 + u_n)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} u_n$.

- On peut donner un équivalent de $\frac{1}{1 - u_n}$ et $\frac{1}{1 + u_n}$ à partir de la formule précédente appliquée à $\alpha = -1$. Mais on peut obtenir cet équivalent directement par un calcul **algébrique** :

$$\frac{1}{1 - u_n} - 1 = \frac{1 - (1 - u_n)}{u_n(1 - u_n)} = \frac{1}{1 - u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et donc $\frac{1}{1 - u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. En remplaçant u_n par $-u_n$, on obtient $\frac{1}{1 + u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -u_n$.

- $\frac{1 - \cos(u_n)}{\frac{u_n^2}{2}} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{u_n}{2}\right)}{\frac{u_n^2}{2}} = \left(\frac{\sin\left(\frac{u_n}{2}\right)}{\frac{u_n}{2}}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et donc $1 - \cos(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$. La démarche est analogue pour le cosinus

hyperbolique à partir de la formule $\text{ch}(u_n) - 1 = 2 \text{sh}^2\left(\frac{u_n}{2}\right)$ (démontrez d'abord cette formule). □

1.2 Propriétés des relations de comparaison

1.2.1 Propriétés de o et O

Dans les théorèmes qui suivent, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$ sont des suites complexes, ne s'annulant pas à partir d'un certain rang si nécessaire.

Théorème 8.

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(w_n)$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(w_n)$. Dit autrement

$$O(O(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n).$$

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$. Dit autrement

$$o(o(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n).$$

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$ ou si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(w_n)$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$. Dit autrement

$$O(o(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n) \text{ et } o(O(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n).$$

DÉMONSTRATION. Pour n supérieur ou égal à un certain n_0 , $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$.

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(w_n)$, alors les suites $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ et $\left(\frac{v_n}{w_n}\right)_{n \geq n_0}$ sont bornées. Il en est de même de la suite $\left(\frac{u_n}{w_n}\right)_{n \geq n_0}$ qui est un produit de suites bornées et donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(w_n)$.

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$, alors les suites $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$ et $\frac{v_n}{w_n} \rightarrow 0$. Mais alors, $\frac{u_n}{w_n} \rightarrow 0 \times 0 = 0$ et donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$.

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour n suffisamment grand, $|u_n| \leq M|v_n|$. Pour n suffisamment grand, $\left|\frac{u_n}{w_n}\right| \leq M \left|\frac{v_n}{w_n}\right|$ et donc $\frac{u_n}{w_n} \rightarrow 0$ ou encore $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(w_n)$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour n suffisamment grand, $|v_n| \leq M|w_n|$. Pour n suffisamment grand, $\left|\frac{u_n}{w_n}\right| = \left|\frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}\right| \leq M \left|\frac{u_n}{v_n}\right|$ et donc $\frac{u_n}{w_n} \rightarrow 0$ ou encore $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$. □

Théorème 9.

- Si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$ et $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$, alors $v_n + w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$. Dit autrement

$$O(u_n) + O(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n).$$

- Si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$ et $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$, alors $v_n + w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$. Dit autrement

$$o(u_n) + o(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n).$$

DÉMONSTRATION. Pour n supérieur ou égal à un certain n_0 , $\frac{v_n + w_n}{u_n} = \frac{v_n}{u_n} + \frac{w_n}{u_n}$.

- Si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$ et $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$, alors les suites $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ et $\left(\frac{w_n}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ sont bornées. Il en est de même de la suite $\left(\frac{v_n + w_n}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ qui est une somme de suites bornées et donc $v_n + w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$.

- Si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$ et $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$, alors $\frac{v_n}{u_n} \rightarrow 0$ et $\frac{w_n}{u_n} \rightarrow 0$. Mais alors, $\frac{v_n + w_n}{u_n} \rightarrow 0 + 0 = 0$ et donc $v_n + w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$. □

Ainsi, par exemple, $n + o(n) + 2n + o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 3n + o(n)$.

Théorème 10. Soit λ un complexe non nul.

- $O(\lambda u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$.
- $o(\lambda u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$.

DÉMONSTRATION .

• Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = O(\lambda u_n)$. Alors, pour n supérieur ou égal à un certain n_0 , $\frac{v_n}{u_n} = \lambda \frac{v_n}{\lambda u_n}$. La suite $\left(\frac{v_n}{\lambda u_n}\right)_{n \geq n_0}$ est bornée et donc la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ est bornée ou encore $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$.

• Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = o(\lambda u_n)$. Alors, pour n supérieur ou égal à un certain n_0 , $\frac{v_n}{u_n} = \lambda \frac{v_n}{\lambda u_n}$. $\frac{v_n}{\lambda u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ et donc $\frac{v_n}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \lambda \times 0 = 0$ ou encore $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$. □

Ainsi, par exemple, $o\left(\frac{2n^2}{3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^2)$.

Théorème 11.

- $u_n O(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n v_n)$. Plus généralement, $O(u_n) O(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n v_n)$. Plus généralement, $o(u_n) o(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n v_n)$.

DÉMONSTRATION .

• Pour n supérieur ou égal à un certain n_0 , $\frac{u_n O(v_n)}{u_n v_n} = \frac{O(v_n)}{v_n}$. La suite $\left(\frac{O(v_n)}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est bornée et il en est de même de la suite $\left(\frac{u_n O(v_n)}{u_n v_n}\right)_{n \geq n_0}$ et donc $u_n O(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n v_n)$.

Plus généralement, pour n supérieur ou égal à un certain n_0 , $\frac{O(u_n) O(v_n)}{u_n v_n} = \frac{O(u_n)}{u_n} \times \frac{O(v_n)}{v_n}$. Les suites $\left(\frac{O(u_n)}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ et $\left(\frac{O(v_n)}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ sont bornées et il en est de même de la suite $\left(\frac{O(u_n) O(v_n)}{u_n v_n}\right)_{n \geq n_0}$ et donc $O(u_n) O(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n v_n)$.

• Pour n supérieur ou égal à un certain n_0 , $\frac{u_n o(v_n)}{u_n v_n} = \frac{o(v_n)}{v_n}$. $\frac{o(v_n)}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ et donc $\frac{u_n o(v_n)}{u_n v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ ou encore $u_n o(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n v_n)$.

Plus généralement, pour n supérieur ou égal à un certain n_0 , $\frac{o(u_n) o(v_n)}{u_n v_n} = \frac{o(u_n)}{u_n} \times \frac{o(v_n)}{v_n}$. $\frac{o(u_n)}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ et $\frac{o(v_n)}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

Par suite, $\frac{o(u_n)}{u_n} \times \frac{o(v_n)}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \times 0 = 0$ et donc $o(u_n) o(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n v_n)$. □

Ainsi, par exemple, $n^2 o(n^4) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^6) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^6 o(1)$.

Théorème 12.

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $O(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$. Dit autrement

$$O(u_n + o(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n).$$

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $o(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$. Dit autrement

$$o(u_n + o(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n).$$

DÉMONSTRATION .

• $u_n + o(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n + O(u_n) = O(u_n) + O(u_n) = O(u_n)$ puis $O(u_n + o(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(O(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$.

• $u_n + o(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$ puis $o(u_n + o(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(O(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$.

□

Ainsi, par exemple, $o(2n^2 - 3n + 5) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(2n^2) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^2)$.

Théorème 13. Soit α un réel strictement positif.

• Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$, alors $|u_n|^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(|v_n|^\alpha)$. Dit autrement

$$|O(u_n)|^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(|u_n|^\alpha).$$

• Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $|u_n|^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(|v_n|^\alpha)$. Dit autrement

$$|o(u_n)|^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(|u_n|^\alpha).$$

DÉMONSTRATION. Pour n supérieur ou égal à un certain n_0 , $\frac{|u_n|^\alpha}{|v_n|^\alpha} = \left| \frac{u_n}{v_n} \right|^\alpha$. Puisque $\alpha > 0$, si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n} \right)_{n \geq n_0}$ est bornée, alors la suite $\left(\frac{|u_n|^\alpha}{|v_n|^\alpha} \right)_{n \geq n_0}$ est bornée, et si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, alors $\frac{|u_n|^\alpha}{|v_n|^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

□

1.2.2 Propriétés de \sim

Commençons par rappeler que

Théorème 14. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. $u_n + o(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

Théorème 15. La relation $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang ou encore, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont trois suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang :

- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$;
- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$;
- $\left(u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \text{ et } v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \right) \Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$.

DÉMONSTRATION.

- $\frac{u_n}{u_n} = 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$ et donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.
- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 \Rightarrow \frac{v_n}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$
- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$ et $\frac{v_n}{w_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 \Rightarrow \frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 \times 1 = 1 \Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$

□

Théorème 16. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quatre suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

- $\left(u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \text{ et } v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} t_n \right) \Rightarrow u_n v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n t_n$.
- $\left(u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \text{ et } v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} t_n \right) \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{w_n}{t_n}$.

Exemple. Le théorème précédent dit que dans un **produit** ou un **quotient**, si on remplace chaque **facteur** par un facteur équivalent, on obtient une suite équivalente. Par exemple, déterminons un équivalent simple en $+\infty$ de

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \times \cos\left(\frac{1}{n}\right) \times \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\ln^2\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) \times \sqrt{4n+3}}$$

Puisque $\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, $\sin\left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n}$. De même, $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$, $e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $\ln\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. D'autre part, $4n+3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4n$ et donc $\sqrt{4n+3} = (4n+3)^{\frac{1}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (4n)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{n}$. Donc,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{3}{n} \times 1 \times \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{2n^2}\right)^2 \times 2\sqrt{n}} = 6n\sqrt{n}.$$

□

DÉMONSTRATION. Supposons $\left(u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \text{ et } v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} t_n\right)$.

$$\frac{u_n v_n}{w_n t_n} = \frac{u_n}{w_n} \times \frac{v_n}{t_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 \times 1 = 1$$

et donc $u_n v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n t_n$. De même,

$$\frac{u_n/v_n}{w_n/t_n} = \frac{u_n}{w_n} \times \frac{t_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

et donc $\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{w_n}{t_n}$.

□

Théorème 17. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives à partir d'un certain rang et α un réel.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

DÉMONSTRATION. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$ puis $\frac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1^\alpha = 1$ et donc $u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

□

Théorème 18. Un polynôme en n , non nul, est équivalent à son monôme de plus haut degré.

Une fraction rationnelle en n , non nulle, est équivalente au quotient de ses monômes de plus haut degré.

DÉMONSTRATION.

• Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n) = \sum_{k=0}^p a_k n^k$ où $p \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{C}^{p+1}$ et $a_p \neq 0$. Pour $n \geq 1$,

$$\frac{P(n)}{a_p n^p} = 1 + \frac{a_{p-1}}{a_p n} + \dots + \frac{a_0}{a_p n^p}.$$

Donc, $\frac{P(n)}{a_p n^p} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1)$ puis $P(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a_p n^p + o(a_p n^p)$ ou encore $P(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_p n^p$.

• Pour n suffisamment grand, posons $R(n) = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\sum_{k=0}^p a_k n^k}{\sum_{k=0}^q b_k n^k}$ où $(p, q) \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q) \in \mathbb{C}^{p+q+2}$ et $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

D'après ce qui précède et le théorème 16,

$$R(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a_p n^p}{b_q n^q} = \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}.$$

□

Passons maintenant aux principaux problèmes que l'on rencontre avec des équivalents. Il y a cinq pièges quand on les manipule :

- on n'écrit pas qu'une suite est équivalente à 0 ;
- on ne passe pas aux exponentielles dans des équivalents ;
- on ne passe pas aux logarithmes dans des équivalents ;
- on n'additionne pas membre à membre des équivalents ;
- on ne passe pas de l'autre côté d'un équivalent pour l'addition.

Reprenons ces problèmes dans l'ordre.

Problème n° 1.

On n'écrit jamais qu'une suite est équivalente à 0.

La première raison est que l'on a défini la relation $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ quand $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites **ne s'annulant pas à partir d'un certain rang**. Même la définition n'utilisant pas de fractions ($u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$) ne peut pas fonctionner si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle car aucune suite n'est négligeable devant la suite nulle.

On peut aller plus loin. Si on se permettait d'écrire que $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ sont équivalents à 0, alors $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ serait équivalents, ce qui n'est pas.

Problème n° 2.

On ne passe pas aux exponentielles dans des équivalents.

Par exemple, $n^2 + n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$ mais $\frac{e^{(n^2+n)}}{e^{(n^2)}} = e^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ et donc $e^{(n^2+n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\gg} e^{(n^2)}$ et en tout cas, $e^{(n^2+n)} \not\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{(n^2)}$.

La règle est permettant de gérer les exponentielles est la suivante :

Théorème 19. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

$$e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n} \Leftrightarrow u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

Dit autrement,

$$e^{u_n + o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{u_n}.$$

DÉMONSTRATION. $e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n} \Leftrightarrow \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 \Leftrightarrow e^{u_n - v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1 \Leftrightarrow u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ (car $u_n - v_n = \ln(e^{u_n - v_n})$.)

□

Ainsi, on obtient un équivalent d'une suite du type e^{u_n} en effaçant tous les termes tendant vers 0 dans l'exposant. Par exemple,

$$e^{n^2 - n + \frac{1}{2} + \frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{n^2 - n + \frac{1}{2}}.$$

Par contre, on ne peut pas simplifier davantage. Si par exemple, on supprime le terme $\frac{1}{2}$, la suite obtenue n'est plus équivalente.

Problème n° 3.

On ne passe pas aux logarithmes dans des équivalents.

Dit autrement :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \not\Rightarrow \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n).$$

Le principal problème pour donner un équivalent de $\ln(u_n)$ est quand u_n tend vers 1. On rappelle d'abord la bonne façon d'obtenir un équivalent : si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$, alors $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n - 1$. Par exemple,

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Si par contre, on cherche à donner d'abord un équivalent de $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ (par exemple,

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + \frac{17}{n}$$

et les équivalents écrits sont tout à fait justes), puis qu'on passe aux logarithmes, on obtient $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(1 + \frac{17}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{17}{n}$ ou encore pire $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(1) = 0$ ce qui est totalement faux.

Il existe néanmoins des situations où on peut passer aux logarithmes dans les équivalents. La situation la plus simple est quand u_n tend vers un réel strictement positif ℓ différent de 1. Dans ce cas, on a immédiatement $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ell)$. Par exemple, $\ln\left(\frac{2n+3}{n-5}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(2)$. Sinon, on a le théorème suivant :

Théorème 20. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives.

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ et si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$.
- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ et si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

⇒ **Commentaire.** On peut résumer le théorème précédent en disant que si u_n et v_n sont soit des infiniment petits équivalents, soit des infiniment grands équivalents, alors $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

DÉMONSTRATION.

Supposons que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ et que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. Puisque $v_n = \frac{v_n}{u_n} \times u_n$, on a aussi $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ puis

$$\begin{aligned} \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} &= \frac{\ln\left(v_n \times \frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(v_n) + \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} \\ &= 1 + \frac{o(1)}{\ln(v_n)} \quad (\text{car } \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1) \\ &= 1 + o(1) \quad (\text{car } v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty). \end{aligned}$$

Ceci montre que $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ et que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, il suffit d'appliquer ce qui précède aux suites $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Par exemple, $\text{ch}(n) = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ et donc

$$\ln(\text{ch}(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(\frac{e^n}{2}\right) = \ln(n) - \ln(2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n),$$

ou aussi, $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ et donc

$$\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n).$$

Problème n° 4.

On n'additionne pas membre à membre des équivalents.

Par exemple, si $u_n = n^2 + n + 3$ et $v_n = -n^2 + \sqrt{n} + 1$, on a par exemple, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n^2 + \sqrt{n}$. Pourtant, $u_n + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\not\sim} n^2 + (-n^2 + \sqrt{n}) = \sqrt{n}$. En effet, $u_n + v_n = n + \sqrt{n} + 4 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

Le plus simple pour être sûr de ne pas faire d'erreurs de raisonnement avec les équivalents et les sommes, est de revenir systématiquement au théorème

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n + o(u_n).$$

Déterminons par exemple un équivalent simple de $\sqrt{n^4 + 3n^3 - 1} - n^2$ (une catastrophe serait $\sqrt{n^4 + 2n^3 - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n^4} = n^2$ et donc $\sqrt{n^4 + 2n^3 - 1} - n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$).

$$\begin{aligned} \sqrt{n^4 + 3n^3 - 1} - n^2 &= \sqrt{n^4} \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^4} \right)^{\frac{1}{2}} - n^2 \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{n^4} \left(1 + \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{1}{2}} - n^2 \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^2 \left(1 + \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - n^2 \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^2 + \frac{3n}{2} - n^2 + o(n) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{3n}{2} + o(n) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3n}{2}. \end{aligned}$$

Problème n° 5.

On ne passe pas de l'autre côté d'un équivalent pour l'addition.

Par exemple, $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{n}$ mais $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\not\sim} \frac{1}{n}$ (car $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$). L'action de passer le 1 de l'autre côté n'est donc pas correcte.

2 Les théorèmes de croissances comparées

Pour établir les différents théorèmes de croissances comparées, on a besoin d'un lemme :

Théorème 21. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

On suppose que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ tend vers un certain réel ℓ élément de $[0, 1[$. Alors, u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

DÉMONSTRATION. Le réel $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ est strictement positif. Puisque la suite u ne s'annule pas à partir d'un certain rang et

que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ tend vers ℓ , il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $u_n \neq 0$ et $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \frac{1-\ell}{2}$. Pour $n \geq n_0$, on a

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - \ell = \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - |\ell| \leq \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \frac{1-\ell}{2}$$

et donc $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$. Pour $n \geq n_0 + 1$, on a

$$|u_n| = |u_{n_0}| \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} \leq |u_{n_0}| \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{1+\ell}{2} = |u_{n_0}| \left(\frac{1+\ell}{2} \right)^{n-n_0}.$$

Maintenant, $\frac{1+\ell}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| \left(\frac{1+\ell}{2} \right)^{n-n_0} = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. □

Théorème 22 (les théorèmes de croissances comparées).

- 1) $\forall (\alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^2, \alpha < \alpha' \Rightarrow n^\alpha \ll_{+\infty} n^{\alpha'}$.
- 2) $\forall (q, q') \in]0, +\infty[^2, q < q' \Rightarrow q^n \ll_{+\infty} q'^n$.
- 3) $\forall (\alpha, q) \in \mathbb{R} \times]1, +\infty[, n^\alpha \ll_{+\infty} q^n$ et $\forall (\alpha, q) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, q^n \ll_{+\infty} n^\alpha$.
- 4) $\forall q \in]0, +\infty[, q^n \ll_{+\infty} n!$.
- 5) $n! \ll_{+\infty} n^n$.

DÉMONSTRATION.

1) Soit $(\alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \alpha'$. Alors $\alpha - \alpha' < 0$ puis

$$\frac{n^\alpha}{n^{\alpha'}} = n^{\alpha - \alpha'} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc $n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^{\alpha'})$.

2) Soit $(q, q') \in]0, +\infty[^2$ tel que $q < q'$. Alors $0 < \frac{q}{q'} < 1$ puis

$$\frac{q^n}{q'^n} = \left(\frac{q}{q'}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc $q^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(q'^n)$.

3) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q \in]1, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{n^\alpha}{q^n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \times \frac{q^n}{q^{n+1}} = \frac{1}{q} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha.$$

On en déduit que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ tend vers $\frac{1}{q} \in]0, 1[$ puis que u_n tend vers 0 d'après le théorème 21. Ceci montre que $n^\alpha \ll_{+\infty} q^n$.

4) Soit $q \in]0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{q^n}{n!}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{q}{n+1}.$$

On en déduit que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ tend vers 0 $\in]0, 1[$ puis que u_n tend vers 0 d'après le théorème 21. Ceci montre que $q^n \ll_{+\infty} n!$.

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1) \times n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

On a déjà vu que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tend vers e et donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$ tend vers $\frac{1}{e}$. Ainsi, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ tend vers $\frac{1}{e} \in]0, 1[$ puis u_n tend vers 0 d'après le théorème 21. Ceci montre que $n! \ll_{+\infty} n^n$. □

Ce théorème sera complété par différents résultats sur les limites de fonctions. Les théorèmes de croissances comparées pour les fonctions ont déjà été donnés mais le lien avec les limites de suites n'a pas encore été effectué. On peut quand même signaler sans démonstration que pour tout $\alpha > 0$, $\ln(\ln n) \ll_{+\infty} \ln(n) \ll_{+\infty} n^\alpha$.

Ainsi, par exemple,

$$1 \ll_{+\infty} \ln(\ln n) \ll_{+\infty} \ln n \ll_{+\infty} \ln^2 n \ll_{+\infty} \sqrt{n} \ll_{+\infty} n \ll_{+\infty} n \ln n \ll_{+\infty} n^{\frac{3}{2}} \ll_{+\infty} n^2 \ll_{+\infty} (1,01)^n \ll_{+\infty} 2^n \ll_{+\infty} n! \ll_{+\infty} n^n$$

et aussi

$$\frac{1}{n^n} \ll_{+\infty} \frac{1}{n!} \ll_{+\infty} \frac{1}{2^n} \ll_{+\infty} \frac{1}{(1,01)^n} \ll_{+\infty} \frac{1}{n^2} \ll_{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \ll_{+\infty} \frac{1}{n \ln n} \ll_{+\infty} \frac{1}{n} \ll_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ll_{+\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \ll_{+\infty} \frac{1}{\ln n} \ll_{+\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)} \ll_{+\infty} 1.$$

3 Quelques applications des relations de comparaison

3.1 Calculs de limites

On a le résultat suivant :

Théorème 23. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On suppose que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Si (u_n) converge vers un certain $\ell \in \mathbb{C}$, alors (v_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

Supposons de plus que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont réelles.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

DÉMONSTRATION .

Supposons que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$ et que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. Alors,

$$v_n = \frac{v_n}{u_n} \times u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \times \ell = \ell.$$

Supposons que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. Alors,

$$v_n = \frac{v_n}{u_n} \times u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

□

A titre d'exemple, déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\frac{1}{n}} - 1)^3 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ln^2\left(\frac{n^2 + 3}{n^2}\right) \sqrt{3n + 1}}$.

- $(e^{\frac{1}{n}} - 1)^3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$.
- $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.
- $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- $\ln^2\left(\frac{n^2 + 3}{n^2}\right) = \ln^2\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{3}{n^2}\right)^2 = \frac{9}{n^4}$.
- $\sqrt{3n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{3n}$.

Donc,

$$\frac{(e^{\frac{1}{n}} - 1)^3 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ln^2\left(\frac{n^2 + 3}{n^2}\right) \sqrt{3n + 1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n^3} \times \frac{1}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{9}{n^4} \times \sqrt{3n}} = \frac{1}{18\sqrt{3}}.$$

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\frac{1}{n}} - 1)^3 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ln^2\left(\frac{n^2 + 3}{n^2}\right) \sqrt{3n + 1}} = \frac{1}{18\sqrt{3}}.$$

3.2 Etudes de signes au voisinage de $+\infty$

On a le résultat suivant :

Théorème 24. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors pour n suffisamment grand, à partir d'un certain rang, u_n et v_n ont même signe.

DÉMONSTRATION . Puisque $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, on a $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$. En particulier, à partir d'un certain rang, $\frac{u_n}{v_n} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ et

donc u_n et v_n ont même signe. □

Par exemple, on démontrera dans les prochains chapitres que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $\text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Par suite,

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{6n^3} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

On en déduit que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3} > 0$ puis que pour n suffisamment grand, $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$.