Intégrales, primitives

Sommaire

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

II. Primitives d'une fonction continue

III. Intégrale d'une fonction continue

Programmes et prérequis

Dans les programmes :

- *En Terminales S et ES*
- *Option Terminale L*
- *BTS*

Prérequis :

- *Continuité*
- *Dérivabilité*
- *Étude de fonctions*
- *Fonctions usuelles*

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

1) Activité d'introduction

f est la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = e^x$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
On choisit l'aire du rectangle OIKJ avec K (1 ; 1) pour unité d'aire.

On se propose de déterminer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

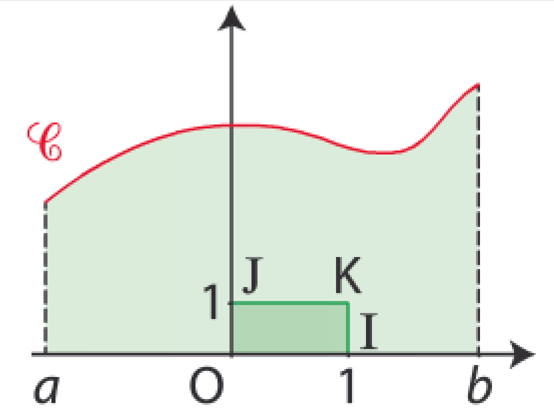
1) Par un encadrement « à la main »
2) En utilisant un logiciel de géométrie dynamique
3) Avec Algobox

Objectifs : encadrer l'aire sous une courbe, et utilisation de Géogebra ou Algobox.

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

2) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a,b]. On appelle **intégrale** de f sur [a,b] le nombre qui exprime l'aire, en u.a., du domaine D délimité par la courbe C de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x=a et x=b.

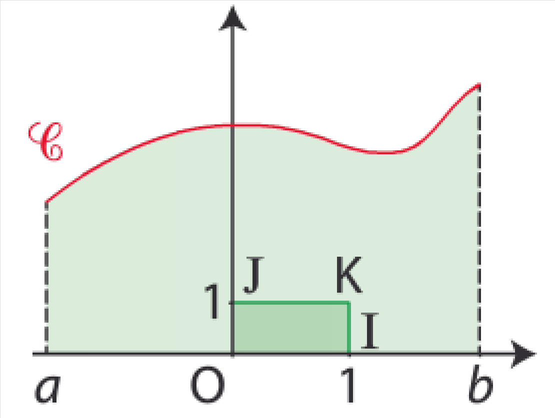


Notation : On note $\int_a^b f(t)\,dt = aire(D)$.

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

2) Définition

- *Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive*



- *Notation de cette intégrale*

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

3) Théorème fondamental

Théorème (fondamental) : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a,b]. Dans ce cas, la fonction F définie par

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur [a,b] et F'=f.

Remarque : Ce théorème est démontré en Terminale S pour le cas où f est croissante, mais est admis dans le cas général.

I. Intégrale d'une fonction continue et positive

3) Théorème fondamental

- *Théorème (fondamental)*

<u>*Remarque :*</u> Ce théorème est démontré en Terminale S pour le cas où f est croissante, mais est admis dans le cas général.

II. Primitives d'une fonction continue

1) Définition et lien entre primitives

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que F'=f.

Théorème : Soit f une fonction sur un intervalle I qui admet une primitive Ψ sur I. Alors f admet une infinité de primitives sur I et toute primitive F de f sur I est définie par F(x) = Ψ(x) + k, où k est une constante réelle .

II. Primitives d'une fonction continue

1) Définition et lien entre primitives

- *Définition d'une primitive d'une fonction continue*

Théorème : Soit f une fonction sur un intervalle I qui admet une primitive Ψ sur I. Alors f admet une infinité de primitives sur I et toute primitive F de f sur I est définie par $F(x) = \Psi(x) + k$, où k est une constante réelle .

II. Primitives d'une fonction continue

1) Définition et lien entre primitives

<u>*Conséquence 1 :*</u> Soit f une fonction continue et positive sur [a,b]. Si l'on connaît une primitive F de f, alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

<u>*Conséquence 2 :*</u> Si f admet des primitives sur I, alors pour tout x dans I et tout réel y, il existe une unique primitive F sur I vérifiant F(x)=y.

II. Primitives d'une fonction continue

2) Existence de primitives

__Théorème :__ Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

__Remarque :__ Le résultat n'est démontré que dans le cas où l'intervalle I est fermé et borné.

__Théorème :__ Si F et G sont des primitives respectivement des fonctions f et g sur un intervalle I, alors F+G est une primitive de f+g sur I.

__Théorème :__ Si F est une primitive de f sur un intervalle I, et k un réel, alors kF est une primitive de kf sur I.

II. Primitives d'une fonction continue

2) Existence de primitives

- *Théorème d'existence de primitives*

<u>Remarque :</u> Le résultat n'est démontré que dans le cas où l'intervalle I est fermé et borné.

<u>Théorème :</u> Si F et G sont des primitives respectivement des fonctions f et g sur un intervalle I, alors F+G est une primitive de f+g sur I.

<u>Théorème :</u> Si F est une primitive de f sur un intervalle I, et k un réel, alors kF est une primitive de kf sur I.

II. Primitives d'une fonction continue

3) Calcul de primitives

f est définie sur I par $f(x) = \dots$	Les primitives de f sur I sont définies par $F(x) = \dots$	L'intervalle I = …
k (avec $k \in \mathbb{R}$)	$kx + C$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$]0\,;+\infty[$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + C$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$]0\,;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$

II. Primitives d'une fonction continue

3) Calcul de primitives

Fonction f	Primitives de f sur I	Conditions sur u
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$ et $n \neq -1$)	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	Lorsque $n < -1$, pour tout x de I, $u(x) \neq 0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u + C$	$u(x) > 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u'e^u$	$e^u + C$	
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$ sur I

III. Intégrale d'une fonction continue

1) Extension de la notion d'intégrale

__Définition :__ Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b]. L'**intégrale** de a à b de f est le nombre réel F(b)-F(a), où F est une primitive de f sur [a,b].

__Notation :__ On écrira $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

__Conséquences :__

- $\int_a^a f(t)\,dt = 0$
- $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

III. Intégrale d'une fonction continue

1) Extension de la notion d'intégrale

- *Définition de l'intégrale d'une fonction continue*

<u>Notation :</u> On écrira $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

<u>Conséquences :</u>

- $\int_a^a f(t)\,dt = 0$
- $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

- Comprendre le lien avec l'aire sous la courbe

III. Intégrale d'une fonction continue

2) Propriétés de l'intégrale

<u>Propriété de linéarité :</u> Soient f et g deux fonctions continues sur [a,b] et k un nombre réel, alors :

- $\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$
- $\int_a^b kf(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt$

<u>Propriété (ordre et positivité) :</u> Soient f et g deux fonctions continues sur [a,b] avec a ≤ b.

- Si pour tout x de [a,b], f(x) ≥ 0, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$
- Si pour tout x de [a,b], f(x) ≤ g(x), alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

III. Intégrale d'une fonction continue

2) Propriétés de l'intégrale

<u>Relation de Chasles :</u> Soient f une fonction continue sur [a,b] et c un réel de [a,b], alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

III. Intégrale d'une fonction continue

3) Valeur moyenne

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b] avec a < b. La **valeur moyenne** de la fonction f sur [a,b] est le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Inégalité de la moyenne : Soient f une fonction continue sur [a,b] et m, M deux réels. Si pour tout x de [a,b], m ≤ f(x) ≤ M, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$$

Merci pour votre attention !

Références :

- *Hyperbole Term S Spécifique – 2012*, Nathan.
- *Indice Tle S Spécifique – 2012*, Bordas.
- *Transmath Term S – 2012*, Nathan.