# Marches aléatoires

## Sommaire

# Programmes et prérequis

<u>**Programme :**</u>

- *Terminale S – Spécialité : marches aléatoires*
- *Terminale ES – Spécialité : graphes probabilistes*

<u>**Prérequis :**</u>

- *Matrices : définitions, calcul matriciel, convergence*
- *Raisonnement par récurrence et suites*
- *Graphes*
- *Probabilités*

# Activité introductive

## *1) Déplacements à 2 sens*

*Énoncé :* Une fourmi est placée à un endroit donné du sol. Chaque seconde, la fourmi effectue un pas vers l'avant ou un pas vers l'arrière de façon équiprobable. *Écrire un algorithme qui donne la position de la puce à la fin de la marche.*

*Remarques :*

- Possibilité de donner davantage de conseils sur la modélisation.
- Utilisation d'Algobox.

# Activité introductive

## *2) Généralisation du problème*

*<u>Énoncé :</u>* Une fourmi est placée à un endroit donné du sol. Chaque seconde, notre fourmi effectue un pas vers le haut, le bas, la gauche ou la droite de façon équiprobable. *Écrire un algorithme qui donne la position de la puce à la fin de la marche.*

*<u>Remarques :</u>*

- Possibilité de donner davantage de conseils sur la modélisation.
- Utilisation d'Algobox.

# I. Définitions et propriétés

*Définition :* Une *marche aléatoire* est l'évolution au cours du temps d'un système pouvant, à chaque instant, être dans un certain nombre d'*états* possibles.

*Exemple :* On s'intéresse à l'évolution d'une maladie chez un individu. Au début de l'expérience, l'individu est malade avec une probabilité de 0,05. Si l'individu est malade un jour donné, il l'est le lendemain avec une probabilité de 1/4. S'il n'est pas malade un jour donné, il reste sain le lendemain avec une probabilité de 2/3.

On définit ainsi une marche aléatoire dont les états sont « être malade » et « être sain ».

# I. Définitions et propriétés

*__Définition :__* On appelle *matrice de transition* d'une marche aléatoire et on note T, la matrice carrée dont le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est la probabilité de transition de l'état j à l'état i.

# I. Définitions et propriétés

<u>*Définition :*</u> La *matrice colonne des états* de la marche aléatoire à l'instant n est la matrice colonne dont le coefficient de la ligne i est la probabilité que le système soit à l'état i à l'instant n. On la note souvent $P_n$ .

<u>*Remarque :*</u> La somme des éléments de la matrice des états à l'instant n doit valoir 1.

# I. Définitions et propriétés

*<u>Propriété :</u>* On considère une marche aléatoire dont la matrice de transition est notée T et la matrice colonne des états à l'instant n est notée $P_n$ . Dans ce cas, pour tout entier naturel n, on a :

$$P_{n+1} = TP_n$$

*<u>Remarque :</u>* On en déduit que pour tout entier naturel n :

$$P_n = T^n P_0$$

# II. Étude asymptotique d'une marche aléatoire

*__Définition :__* Une marche aléatoire est dite *convergente* si la suite $\left(P_n\right)$ des matrices colonnes des états converge vers une matrice P.

*__Définition :__* Si la suite $\left(P_n\right)$ converge vers une matrice P, alors cette matrice P est appelée *état stable* de la marche aléatoire.

*__Propriété :__* Si la suite $\left(P_n\right)$ converge vers une matrice P, alors, en notant T la matrice de transition de la marche aléatoire, on a : P=TP.

# III. Exemples de marches aléatoires

## 1) Urnes de Ehrenfest

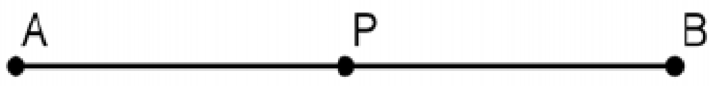
*Énoncé :* On considère deux urnes A et B et N particules. À l'instant n=0, les N particules sont réparties dans A et B. A chaque instant n >0, on choisit au hasard l'une des particules et on la change d'urne.

- Écriture d'un algorithme sur Algobox pour simuler l'expérience.
- Étude du problème pour N=3.

# III. Exemples de marches aléatoires

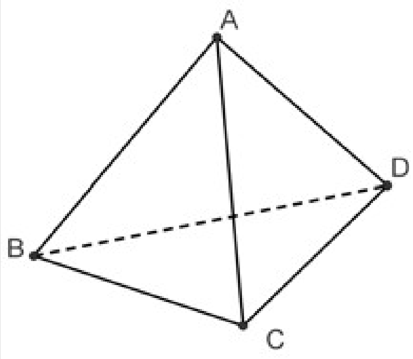
## 2) Graphes probabilistes

Le personnage se déplace d'un sommet à l'autre du graphe ci-dessous. S'il est en A ou en B, il ne peut aller qu'en P, s'il est en P, il peut aller en A ou en B avec des probabilités que nous considérons comme identiques.



# III. Exemples de marches aléatoires

## 3) Marche aléatoire sur un tétraèdre




On considère un tétraèdre ABCD. À chaque étape, un personnage peut passer de tout sommet donné à tout autre sommet donné.

<u>*Question :*</u> Ayant quitté un sommet du tétraèdre, au bout de combien de pas aléatoires le personnage peut compter y revenir ?

# III. Exemples de marches aléatoires

## 4) Moteur de recherche

*Le but est de mesurer la pertinence des pages du Web.*

- Utilisation d'un graphe orienté
- Comptage pondéré
- Comptage récursif

# Bibliographie (pour la classe)

- Ressources Eduscol
- Site de l'APMEP