Cours sur les dérivées

Par Fred pour Mathsendirect

1 Introduction

1.1 Fonction affine et coefficient directeur

1.1.1 Fonction affine

Une fonction affine est une fonction de la forme $x \mapsto ax + b$ avec a et b des nombres réels.

Sa représentation graphique est une droite.

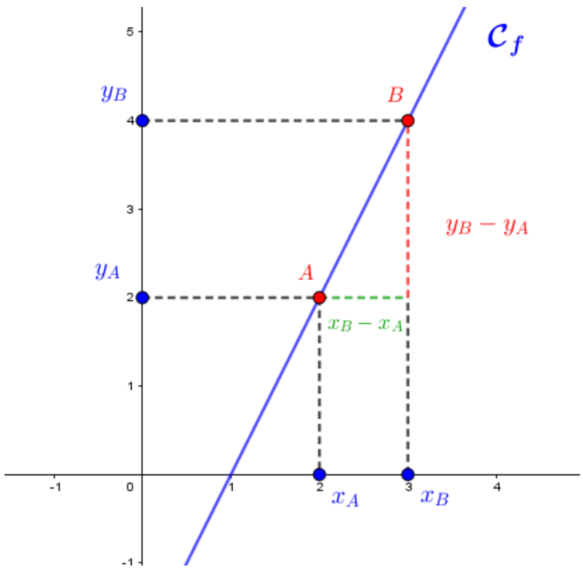
1.1.2 Coefficient directeur

Le nombre a dans une fonction affine de la forme $ax + b$ est appelé le coefficient directeur mais également la pente de la droite représentée par le fonction f. On nommera $\mathcal{C}_f$ cette droite.

Ce coefficient directeur se trouve de la façon suivante :

On prend deux points A et B de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) appartenant à la droite $\mathcal{C}_f$ et on applique la formule :

$$\boxed{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$



Courbe de la fonction $f : x \mapsto 2x - 2$

Sur cet exemple on peut voir que :

- Pour aller de $x_A = 2$ à $x_B = 3$ on avance de 1
- Pour aller de $y_A = 2$ à $y_B = 4$ on avance de 2

Donc lorsque x avance de 1, y avance de 2, dans ce cas le coefficient directeur vaut $\dfrac{2}{1} = 2$.
Effectivement :

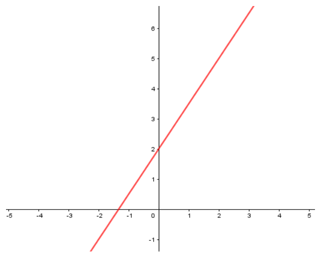
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$$

On dit que le coefficient directeur a est la pente de la droite car elle "dirige" la droite. La direction de la droite dépend du signe de a.

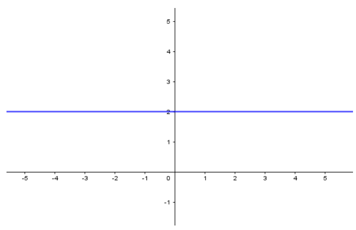
Si $a > 0$ alors la droite monte c'est à dire que la fonction est croissante.

Si $a = 0$ alors la droite est horizontale c'est à dire que la fonction est constante.

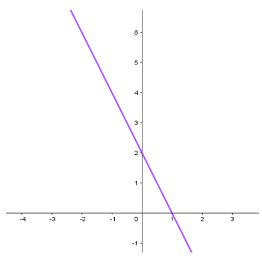
Si $a < 0$ alors la droite descend c'est à dire que la fonction est décroissante



cas $a > 0$



cas $a = 0$



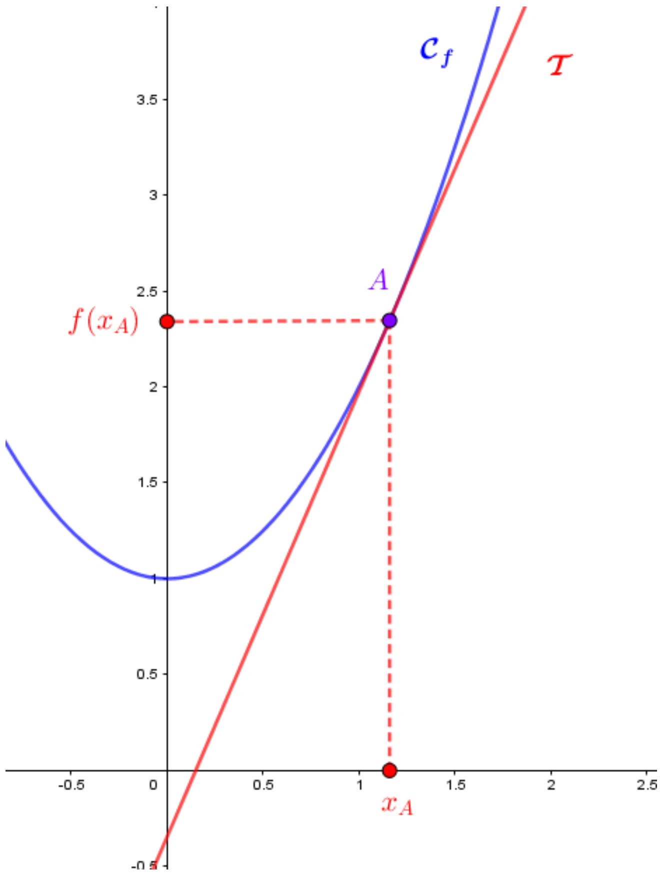
cas $a < 0$

2 Tangente

2.1 Définition

La tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en un point A de coordonnée $(x_A, f(x_A))$ est une droite qui **coupe** $\mathcal{C}_f$ en un **unique point** A d'abscisse x_A

2.2 Exemple



$\mathcal{T}$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse x_A

2.3 introduction au taux d'accroissement

Nous souhaitons connaitre le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ puisque sa représentation graphique est une droite. Voici comment nous allons procéder :

- On place un point A sur la courbe où nous souhaitons obtenir la tangente à $\mathcal{C}_f$, x_A est l'abscisse de A et comme $A \in \mathcal{C}_f$, A à pour coordonnée $(x_A, f(x_A))$
- On place un point B sur la courbe proche de A, pour cela nous allons prendre une abscisse pour B proche de l'abscisse de A, $x_B = x_A + h$ avec h un nombre petit (proche de 0). comme $x_A + h$ est l'abscisse de B et comme $B \in \mathcal{C}_f$, B à pour coordonnée $(x_A + h, f(x_A + h))$

- Nous avons 2 points sur $\mathcal{C}_f$ utilisons la formule du coefficient directeur :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{x_A + h - x_A} = \boxed{\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h}}$$

  La formule ainsi obtenue est appelée la formule du taux d'accroissement.

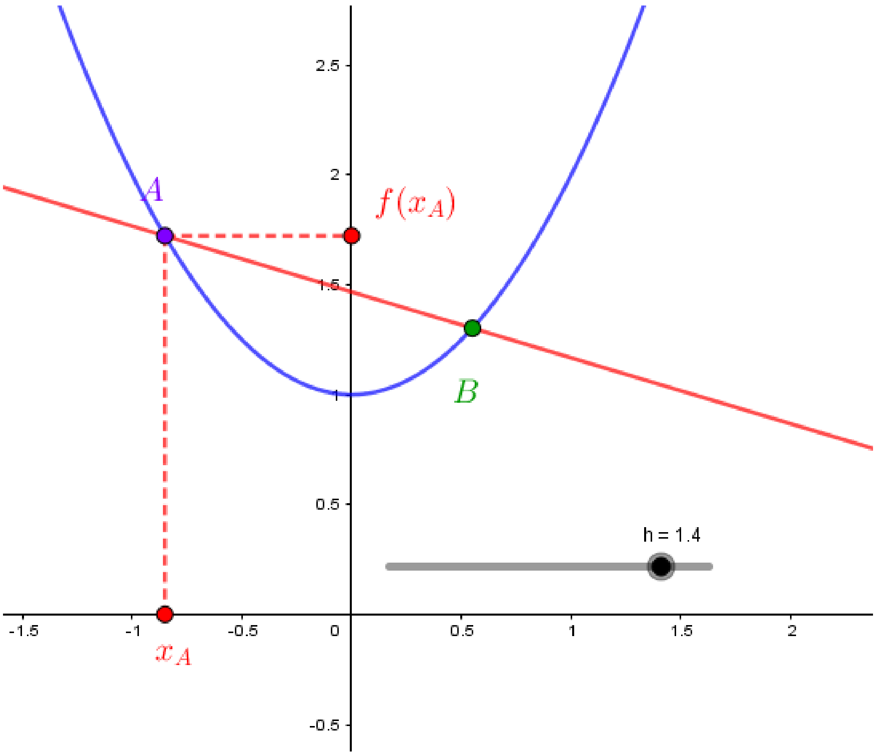
- Ainsi en rapprochant de plus en plus le point B du point A, nous obtiendrons le coefficient directeur de $\mathcal{T}$.

- pour cela on diminue h de plus en plus jusqu'à ce que h s'approche un maximum de 0. (On dit qu'on fait la limite quand h tend vers 0 et on écrit $\lim\limits_{h \to 0}$)

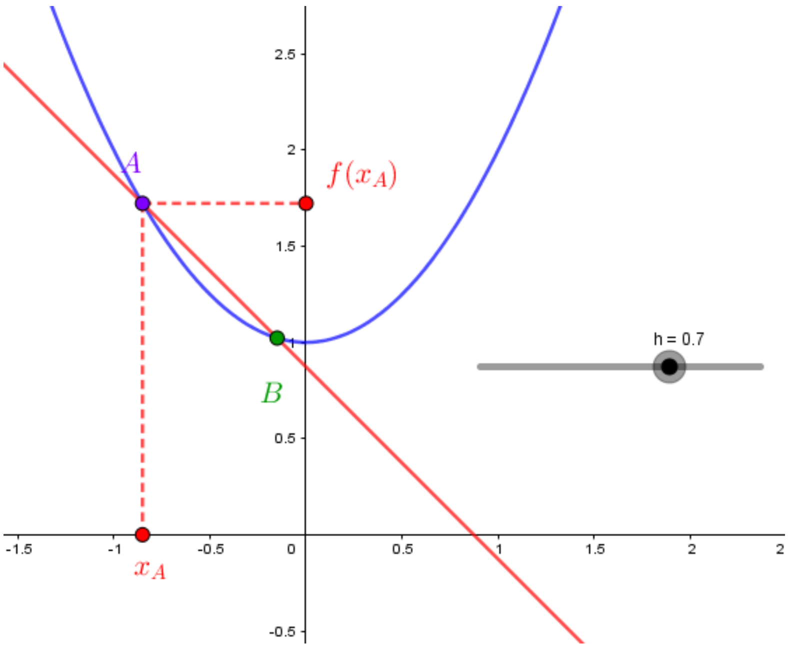
Ainsi

$$\boxed{a = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h}}$$

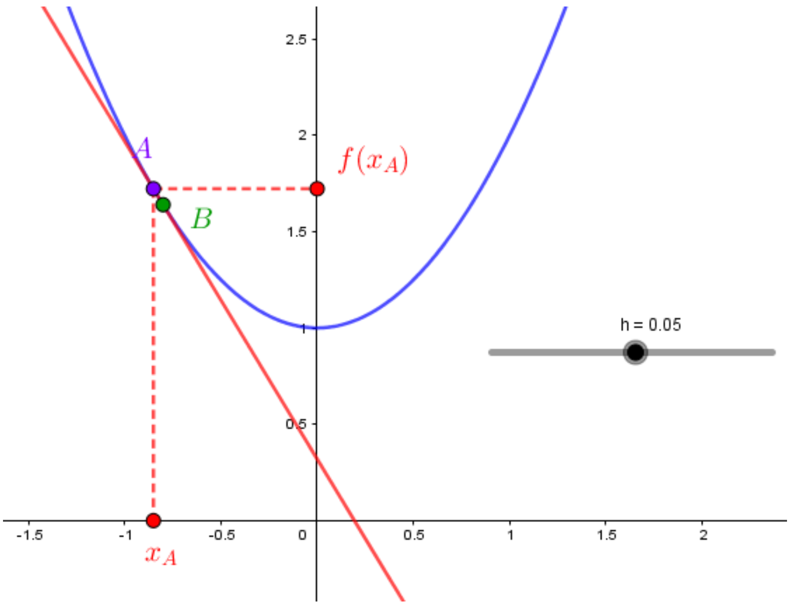
2.4 Exemple graphique



pour h=1.4



pour h=0.7



pour h=0.05

On remarque que plus h se rapproche de 0 plus la droite prend la forme de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.

3 nombre dérivé

3.1 Définition

La quantité $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h}$ est donc le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en A.
Ce coefficient est appelé le nombre dérivé de f en x_A et on le note :

$$\boxed{f'(x_A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h}}$$

3.2 lien entre croissance de f et nombre dérivé

- On remarque que f est croissante lorsque $\mathcal{T}$ est croissante

  De même f est décroissante lorsque $\mathcal{T}$ est décroissante.
- On sait que $\mathcal{T}$ est croissante si $f'(x_A) > 0$ car $f'(x_A) > 0$ est le coefficient directeur de $\mathcal{T}$

  De même $\mathcal{T}$ est décroissante si $f'(x_A) < 0$ car $f'(x_A) < 0$ est le coefficient directeur de $\mathcal{T}$

On en conclut que f est croissante en x_A si $f'(x_A) > 0$

De même f est décroissante en x_A si $f'(x_A) < 0$

4 Fonction dérivée

4.1 Définition dérivable en un point

On dit que f est dérivable en x lorsque $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe (est égal à un nombre réel).

4.2 Définition fonction dérivée

f est dérivable sur un ensemble I si f est dérivable pour tout $x \in I$.

Ainsi on définie une fonction f' sur I telle que $f' : x \mapsto f'(x)$ appelée fonction dérivée de f sur I.

4.3 Propriété : lien entre fonction et fonction dérivée

D'après le point **3.2** et la définition précédente on en conclut que :

- f est croissante sur I si $\forall x \in I, f'(x) > 0$
- f est décroissante sur I si $\forall x \in I, f'(x) < 0$

5 Tableau des dérivées

A l'aide du taux d'accroissement on obtient le tableau des dérivées suivant :

$f(x)$	$f'(x)$	Ensemble de dérivation I
$k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0, +\infty[$
$\sin(x)$	$cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$

6 Opérations sur les dérivées

Soit u et v des fonctions dérivables sur un ensemble I.

$f(x)$	$f'(x)$
$u + v$	$u' + v'$
$k \times u, k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$
$u \times v$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$